

福島県

数学

ジュニアオリンピック



注意

- 1 指示があるまで、中を開かないでください。
- 2 問題は **1** から **6** まであります。
- 3 解答は、すべて解答用紙に書きましょう。
- 4 解答は、こく、はっきりと書きましょう。また、消すときは、消しゴムできれいに消しましょう。
- 5 解答時間は 60 分です。解答が早く終わったら、よく見直しましょう。
- 6 解答用紙には、会場名を○で囲み、受付番号、学校名、学年、氏名をまちがいのないように書きましょう。
- 7 問題用紙の印刷が見にくいとき、ページがぬけていたりよごれていたりしたとき、解答用紙がよごれていたときは、手をあげて近くの先生に知らせてください。

福島県教育委員会

ヒヒコ、ヒヒコ、
実現する
ふくしま

1

自然数を小さい順に、奇数、奇数、偶数、奇数、奇数、偶数、…となるように並べると、次のようにになります。

1番目 2番目 3番目 4番目 5番目 6番目 7番目 8番目 9番目 10番目 11番目 12番目 13番目 14番目 15番目

1, 3, 2, 5, 7, 4, 9, 11, 6, 13, 15, 8, 17, 19, 10, …

このとき、次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

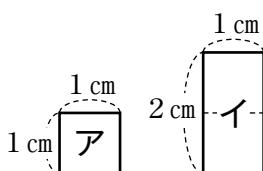
(1) 31番目の数を求めなさい。

(2) 225は何番目の数であるか求めなさい。

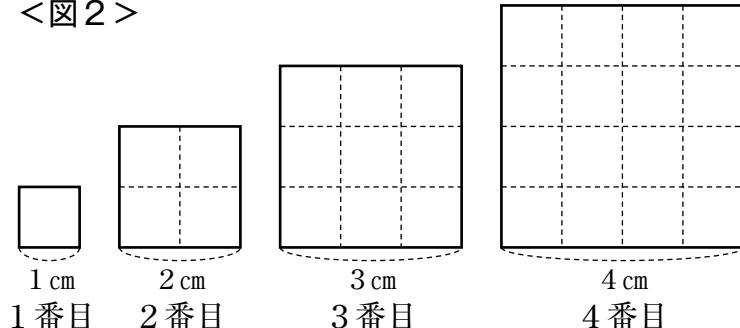
(3) 1番目から n 番目までの自然数をすべてたしたとき、和がはじめて $\overset{\circ}{2}025$ を超えます。このとき、 n にあてはまる数を求めなさい。

下の<図1>のように1辺が1cmの正方形アと辺の長さが1cmと2cmである長方形イをすき間なく並べ、<図2>の1番目、2番目、3番目、4番目、…のように、この順に正方形の形をつくっていきます。

<図1>



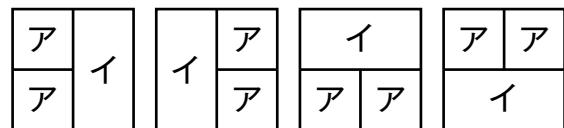
<図2>



2番目の正方形の形をつくるとき、アとイのそれぞれの枚数の選び方は、「アが4枚とイが0枚」、「アが2枚とイが1枚」、「アが0枚とイが2枚」の3通りです。

並べ方まで考えると、例えば、「アが2枚とイが1枚」の並べ方は、<図3>のようにいくつか考えられますが、枚数の選び方だけを考えるので、1通りと数えます。

<図3>



このとき、次の(1)から(3)までの各問い合わせに答えなさい。

(1) 10番目の正方形の形をつくるとき、アとイのそれぞれの枚数の選び方は、全部で何通りあるか求めなさい。

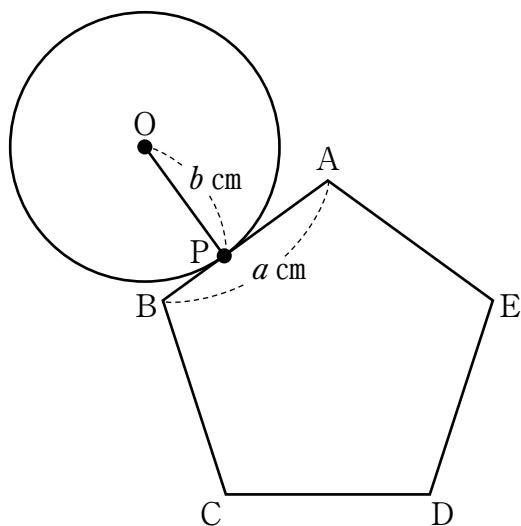
(2) n 番目の正方形の形をつくるとき、アとイのそれぞれの枚数の選び方は、はじめて1019通りを超えます。このとき、 n にあてはまる数を求めなさい。

(3) アとイを同じ枚数ずつ使って正方形の形をつくります。アとイを同じ枚数ずつ使ってつくる正方形のうち1番小さい正方形は3番目の正方形です。3番目の正方形を1個目として、小さい方から675個目の正方形は、アとイをそれぞれ何枚ずつ使うか求めなさい。

次の(1), (2)の各問いに答えなさい。ただし、円周率は π を用いるものとします。

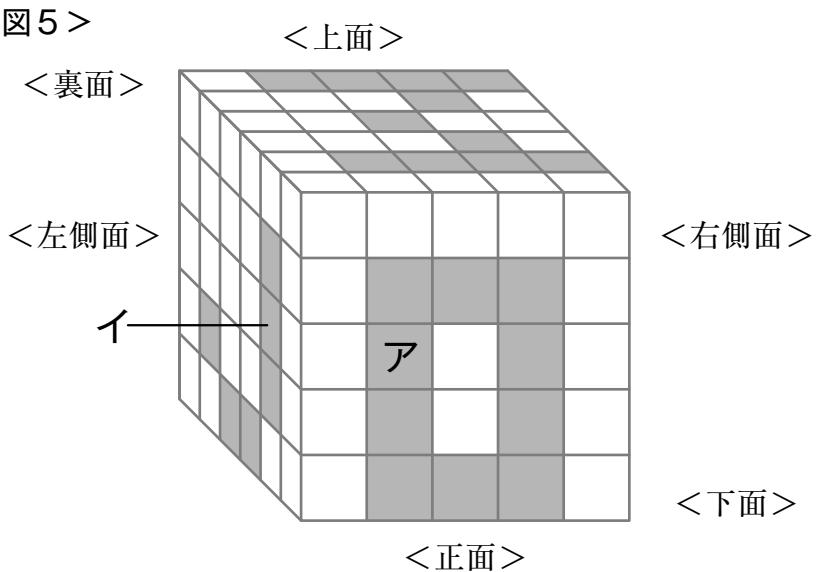
- (1) 下の<図4>のように、1辺の長さが a cmの正五角形ABCDEと半径 b cmの円があります。この正五角形の外側を、円が辺AB上のある点Pを出発し、正五角形の周に沿ってはなれずに1周して点Pに戻ります。このとき、円の中心Oが移動した長さを求めなさい。

<図4>



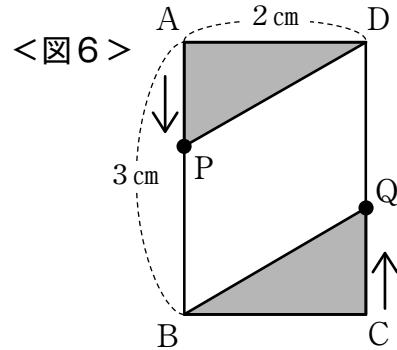
- (2) <図5>は、1辺が1cmの白色の立方体 と黒色の立方体 を縦6cm、横5cm、高さ5cmになるようにすきまなく組み合わせてできる直方体です。この直方体の表面に見えている黒色の立方体は、正面に10個、上面に11個、左側面に6個です。これらの表面に見えている黒色の立方体から、この表面の反対側の面まで、一直線上に並ぶ立方体はすべて黒色の立方体です。例えば、<図5>の正面のアの黒色の立方体から裏面までは、アを含め一直線状にならんでいる6個の立方体が、すべて黒色の立方体です。また、<図5>の左側面のイの黒色の立方体から右側面までは、イを含め一直線状にならんでいる5個の立方体が、すべて黒色の立方体です。これら以外には、黒色の立方体はないとき、この直方体で使われている黒色の立方体の個数を求めなさい。

<図5>



右の<図6>のような縦3cm、横2cmの長方形A B C Dがあります。

はるとさんとつむぎさんは、以下の【ルール1】にしたがってゲームを行います。



【ルール1】

はるとさんのじゃんけんの結果によって、点Pは点Aを出発してA→B→C→D→A→…の順に、つむぎさんのじゃんけんの結果によって、点Qは点Cを出発してC→D→A→B→C→…の順に、どちらも反時計回りに長方形の辺の上を動きます。じゃんけんは39回行い、前半19回と後半20回では、じゃんけんの結果によって点P、Qの動き方は異なり、次の【点P、Qの動き方】にしたがって動きます。

【点P、Qの動き方】

【前半19回】

- 勝ち：2cm進む
- 負け：1cm戻る
- あいこ：移動なし

【後半20回】

- 勝ち：3cm進む
- 負け：2cm戻る
- あいこ：移動なし

例えば、1回目のじゃんけんではるとさんが勝ち、つむぎさんが負けた場合は、点Pは辺AB上の点AからBの方向に2cm進んだ位置、点Qは辺BC上の点CからBの方向に1cm戻った位置にあり、点Pが点Aから進んだ長さは「+2cm」、点Qが点Cから進んだ長さは「-1cm」となります。

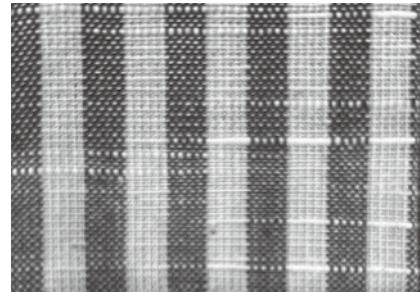
39回のじゃんけんが終了した後に、はるとさんは三角形APD、つむぎさんは三角形BQCの面積をそれぞれ求め、面積が大きい方を勝ちとします。

39回のじゃんけんのうち、あいこは2回だけありました。また、はるとさんの後半の勝ち回数は、前半の勝ち回数の2倍でした。ゲーム終了時に、点Pが点Aから進んだ長さは、点Qが点Cから進んだ長さより7cm長くなりました。このとき、次の(1)、(2)の各問い合わせに答えなさい。

- (1) はるとさんがじゃんけんに勝った回数を求めなさい。
- (2) 三角形APDと三角形BQCの面積をそれぞれ求め、ゲームではるとさんとつむぎさんのどちらが勝ったかを、解答欄に書きなさい。

右の図は、「会津木綿」という会津地方に伝わる伝統的な織物です。経糸に2色以上の色糸をつかって縞を織り、交互に配置しているので、様々な縞模様が織り出され、そのデザインの美しさも魅力の一つです。

このとき、次の(1)、(2)の各問いに答えなさい。



(1) 縞の色が白色の場合は0、黄色の場合は1と表し、以下の【ルール2】にしたがって経糸2色の色糸をつかった縞を配置し、織り進めます。直前の2つの縞の色がその順に白、黄の場合には、[0, 1]と表します。

【ルール2】

縞の色は、直前の2つの縞の色の組合せで決まります。

- ・直前の2つの縞の色が「白、白[0, 0]」だったら、次の縞の色は0
- ・直前の2つの縞の色が「白、黄[0, 1]」だったら、次の縞の色は1
- ・直前の2つの縞の色が「黄、白[1, 0]」だったら、次の縞の色は1
- ・直前の2つの縞の色が「黄、黄[1, 1]」だったら、次の縞の色は0

ある縞Aまで織り進めたとき、ある縞Aの色は0でした。縞Aに続く縞をその順にB, C, …, Hとするとき、A～Hの縞の色を数字で表しなさい。ただし、ある縞Aに続く縞がすべて同じ色にならないものとします。

(2) 縞の色が白色の場合は0、黄色の場合は1、赤色の場合は2、紺色の場合は3と表し、以下の【ルール3】と【ルール4】にしたがって織物を織り進めます。

【ルール3】

① 直前の2つの縞の色の数をたし算し、4で割ったあまりの数の縞にします。

＜例＞ 直前の2つの縞の色がその順に黄、赤の場合、 $(1 + 2) \div 4 = 0$ あまり3だから、次の縞の色は3になる。

② 【ルール3】で織り始めてから白色の縞を5回織ったら、次の縞からは【ルール4】で織り進める。

【ルール4】

① 直前の2つの縞の色の数をたし算し、3で割ったあまりの数の縞にします。

＜例＞ 直前の2つの縞の色がその順に黄、赤の場合、 $(1 + 2) \div 3 = 1$ あまり0だから、次の縞の色は0になる。

② 【ルール4】で織り始めてから白色の縞を8回織ったら、次の縞からは【ルール3】で織り進める。

1番目の縞の色を1、2番目の縞の色を1とします。最初に【ルール3】で縞を織り進めるとき、100番目、200番目、300番目の縞を数字で表しなさい。

6

次の(1), (2)の各問い合わせに答えなさい。

(1) 400以下の自然数aについて, A, B, C, Dの4人が次のように話しています。

- A 「自然数aは2でちょうど3回だけ割り切れます。」
- B 「自然数aは3でちょうど2回だけ割り切れます。」
- C 「自然数aは7でちょうど1回だけ割り切れます。」
- D 「自然数aの各桁の数字の和は15です。」



A～Dの4人のうち3人は正しいことを言っていますが、残りの1人は間違ったことを言っています。

このとき、自然数aを求めなさい。

ただし、商が小数となるもの、例えば、 $13 \div 2$ は商が6.5となり「割り切れます」が、この問題における「割り切れます」とは、例えば $12 \div 2 = 6$ あまり0のようにあまりが0で、商が整数である場合とします。したがって、 $13 \div 2$ は $13 \div 2 = 6$ あまり1で「割り切れます」には当てはまらないとします。

(2) 400以下の自然数bについて, E, F, G, Hの4人が次のように話しています。

- E 「自然数bの約数は16個あります。」
- F 「自然数bと594との公約数が8個あります。」
- G 「自然数bの約数には90があります。」
- H 「自然数bの約数を小さい順に並べると8番目の約数が21です。」

E～Hの4人のうち3人は正しいことを言っていますが、残りの1人は間違ったことを言っています。

このとき、自然数bを求めなさい。

